

Leçon 5.1

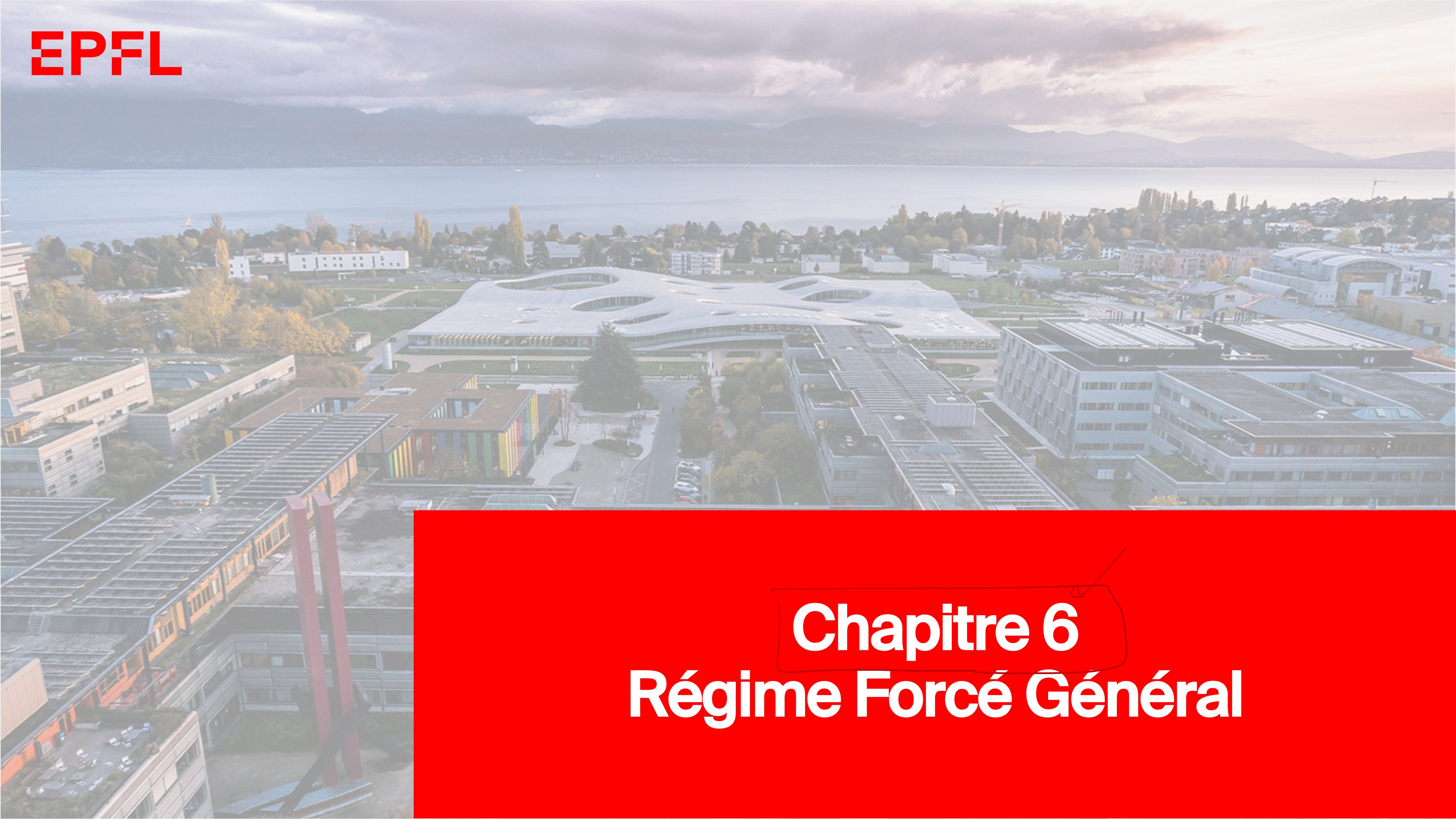
Oscillateur 1D

Forcé Général

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

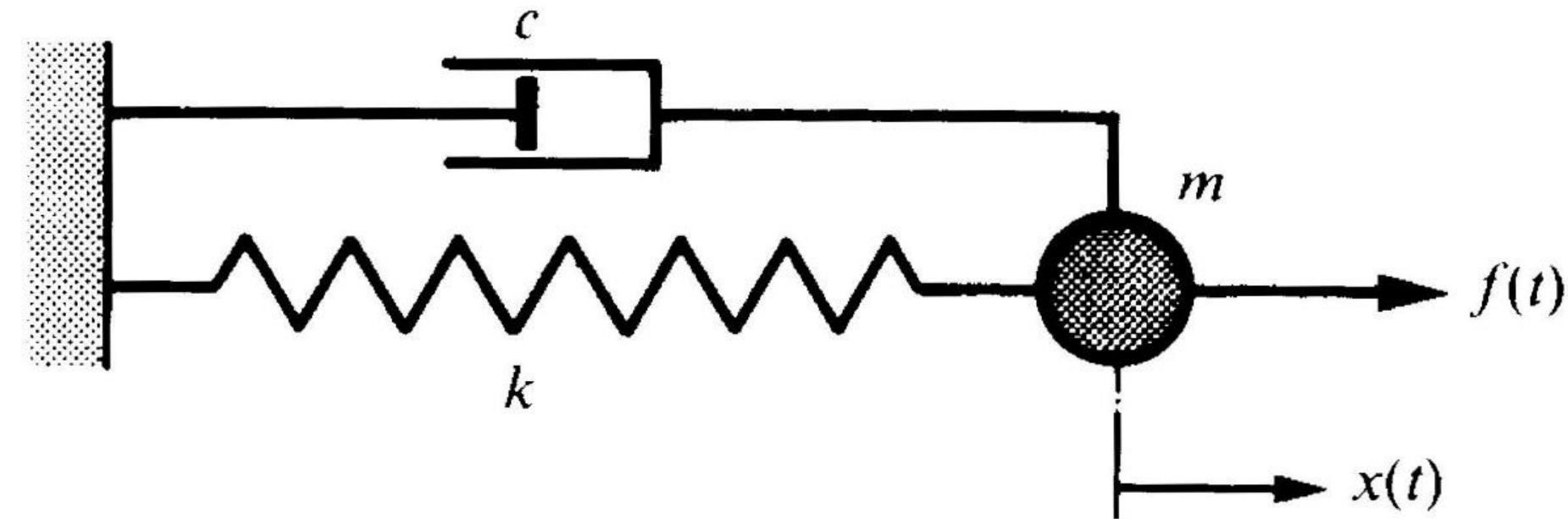
- Régime forcé général
- Solution sur-amortie
- Solution cas critique
- Solution sous-amortie
- Impulsion de Dirac
- Échelon de force



Chapitre 6

Régime Forcé Général

EPFL Régime forcé général



Régime forcé de l'oscillateur élémentaire
(f quelconque)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$$

Solution complète de la forme

$$x = \overbrace{x'(t)} + \overbrace{x''(t)}$$

$x'(t)$ solution particulière de l'équation
 $x''(t)$ solution générale sans second membre

Méthodes de résolution

- recherche directe de solutions particulières
- transformation de Laplace
- transformation de Fourier
- analyse numérique

EPFL Solution générale - Laplace

$$\underbrace{X(s)}_{x(t)} \underbrace{(m s^2 + c s + k)}_{f(t)} = \underbrace{F(s)}_{f(t)} + \underbrace{X_0(m s + c) + V_0 m}_{f(t)} \quad (6.1)$$

Définition de l'*admittance opérationnelle* ou
fonction de transfert

$$Y(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k} \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2 \lambda s + \omega_0^2} \quad (6.5)$$

Transformée de Laplace du mouvement

$$\underbrace{X(s)}_{x(t)} = \underbrace{Y(s)}_{f(t)} \underbrace{F(s)}_{f(t)} + \frac{X_0(s + 2 \lambda) + V_0}{\underbrace{s^2 + 2 \lambda s + \omega_0^2}_{f(t)}} \quad (6.6)$$

EPFL Solution générale - Laplace

$$X(s) = \underbrace{Y(s) F(s)} + \underbrace{\frac{X_0(s + 2\lambda) + V_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}} \quad (6.6)$$

Transformée inverse de Laplace du mouvement
(solution du régime forcé)

$$\underline{x(t)} = \underline{x_a(t)} + \underline{x_b(t)}$$

$\underline{x_a(t)}$ fonction inverse du premier membre (forcée)
 $\underline{x_b(t)}$ fonction inverse des termes initiaux

Calcul de la réponse $x_a(t)$ par le théorème de composition – *intégrale de convolution*

$$\begin{aligned} \underline{x_a(t)} &= \int_0^t \underbrace{y(t-u)}_{\uparrow} \underbrace{f(u)}_{\uparrow} du \\ &= \int_0^t \underbrace{y(u)}_{\uparrow} f(t-u) du \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \underline{Y(s)} &\leftrightarrow \underline{y(t)} \\ \underline{F(s)} &\leftrightarrow \underline{f(t)} \end{aligned}$$

EPFL Solution générale – surcritique

Fonction de transfert et réponse temporelle en cas d'*amortissement surcritique* ($\eta > 1$)

$$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0$$

$\hookrightarrow \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}} \right\} \text{réels}$

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)} \rightarrow y(t) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sinh(\omega_1 t)$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u} \text{sh } \omega_1 u \cdot f(t-u) du + e^{-\lambda t} \left(X_0 \text{ch } \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \text{sh } \omega_1 t \right) \quad \text{leçon 2 (6.9)}$$

$$\frac{X_0(s + 2\lambda) + V_0}{(s - r_1)(s - r_2)}$$

$$X_0 \frac{s + \lambda}{(s - r_1)(s - r_2)} + \frac{V_0 + \lambda X_0}{(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{(V_0 + \lambda X_0)}{\omega_1} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sinh(\omega_1 t)$$

EPFL Solution générale – critique

$$\eta = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

Fonction de transfert et réponse temporelle en cas d'amortissement critique ($\eta = 1$)

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \omega_0)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{y(t)} = \frac{1}{m} \cdot t \cdot e^{-\omega_0 t} = \frac{1}{m} t \cdot e^{-\lambda t}$$

$$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0 \quad r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0$$

$$\underline{x(t)} = \frac{1}{m} \int_0^t u e^{-\omega_0 u} \cdot f(t-u) du$$

$$+ (X_0 + (\omega_0 X_0 + V_0)t) e^{-\omega_0 t} \quad \text{Léon 2 (6.11)}$$

$$\frac{X_0 (s+2\lambda) + V_0}{(s+\omega_0)^2} = \underbrace{X_0 \frac{s}{(s+\omega_0)^2}}_{(1-\omega_0 t) e^{-\omega_0 t}} + \underbrace{\frac{V_0 + 2\lambda X_0}{(s+\omega_0)^2}}_{(V_0 + 2\omega_0 X_0) \cdot t e^{-\omega_0 t}}$$

EPFL Solution générale – sous-critique

Fonction de transfert en cas d'amortissement
sous-critique ($\eta < 1$)

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \lambda)^2 + \omega_0^2 - \lambda^2} \\
 &= \frac{1}{m \omega_1} \frac{\omega_1}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= -\lambda + \omega_1 j \\
 r_2 &= -\lambda - \omega_1 j
 \end{aligned}$$

Admittance temporelle correspondante

$$y(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m \omega_1} \sin \omega_1 t \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{m \omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u} \sin \omega_1 u \cdot f(t-u) du \\
 &\quad + X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

avec

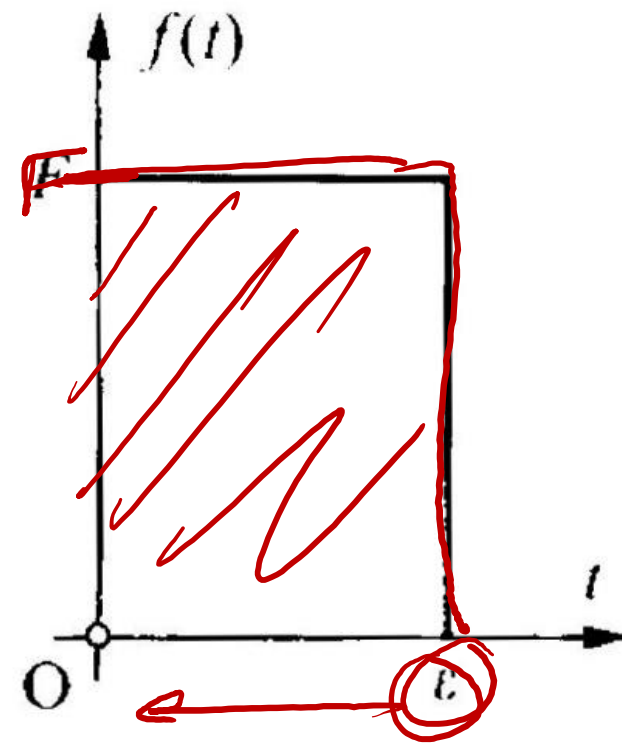
$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1 X_0}$$

EPFL Solution de l'impulsion de Dirac

Définition de l'impulsion de Dirac (force impulsionnelle F)

$$F \varepsilon = 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0, F \rightarrow \infty) \quad [F \varepsilon] = 1 \text{ N s}$$



Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = 1$$

Transformée de Laplace de la réponse (sous conditions initiales nulles)

$$X(s) \equiv D(s) = Y(s) \cdot F(s) = Y(s) \cdot 1 = Y(s)$$

Réponse de l'oscillateur soumis à une impulsion de Dirac : *réponse impulsionnelle*

$$d(t) = y(t) \quad (6.14)$$

Analyse dimensionnelle des grandeurs

$$[d(t)] = \text{m} \quad [y(t)] = \text{s/kg}$$

$$[D(s)] = \text{m s} \quad [Y(s)] = \text{N/m} = \text{s}^2/\text{kg}$$

$$[F(s)] = \text{N} \cdot \text{s} \quad [s] = [\omega_0] = 1/\text{s}$$

EPFL Solution de l'impulsion de Dirac

Réponse impulsionnelle en cas d'*amortissement*
surcritique ($\eta > 1$)

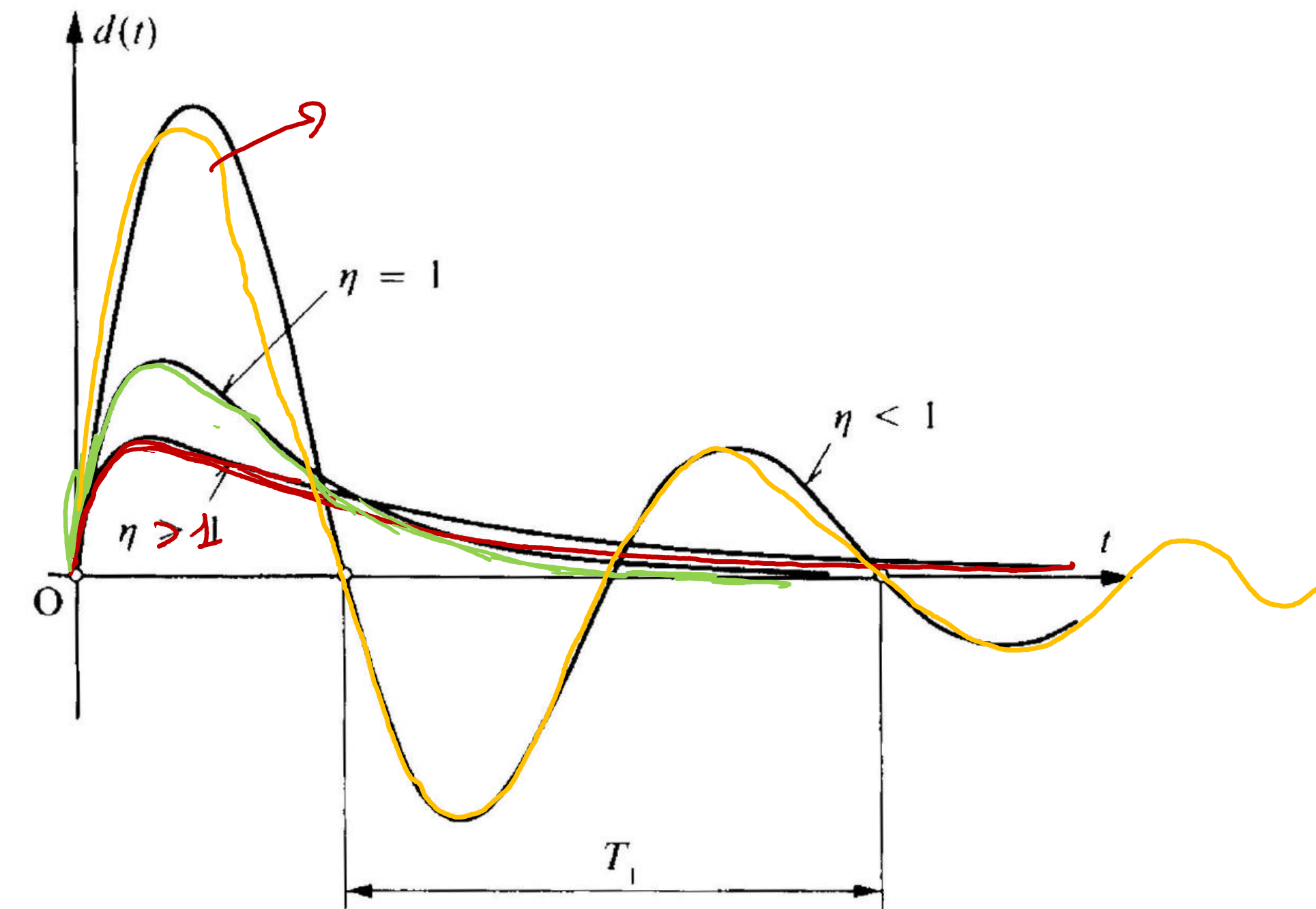
$$\begin{aligned} x(t) = d(t) &= \frac{e^{-\lambda t}}{2 m \omega_1} (e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{m \omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t \end{aligned} \quad (6.15)$$

Réponse impulsionnelle en cas d'*amortissement*
critique ($\eta = 1$)

$$x(t) = d(t) = \frac{t}{m} e^{-\omega_0 t} \quad (6.16)$$

Réponse impulsionnelle en cas d'*amortissement*
sous-critique ($\eta < 1$)

$$x(t) = d(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m \omega_1} \sin \omega_1 t \quad (6.17)$$

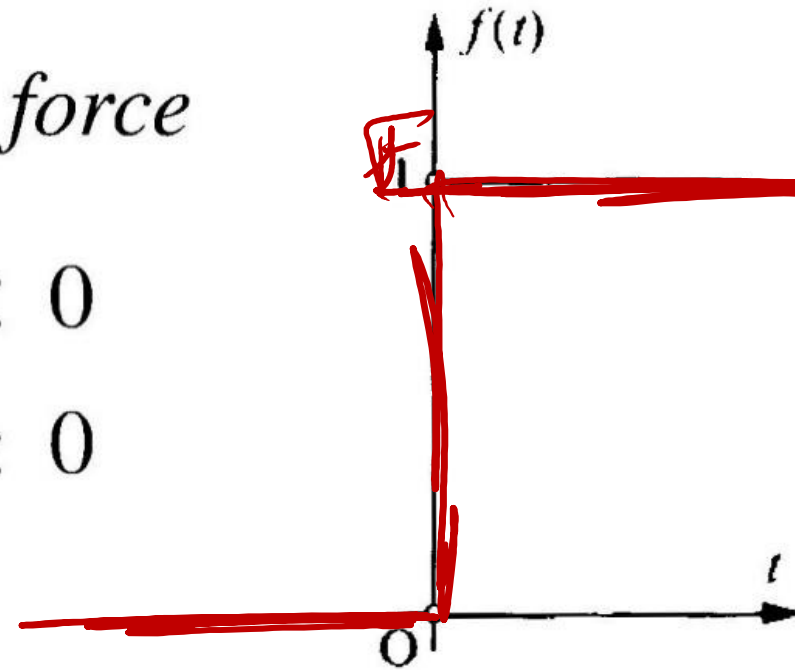


EPFL Solution de l'échelon de force

Définition de l'échelon de force

$$f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$f(t) = 1 \quad \text{pour } t \geq 0$$



Transformée de Laplace de l'échelon de force

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = 1/s$$

Transformée de Laplace de la réponse indicielle
(sous conditions initiales nulles)

$$X(s) \equiv E(s) = Y(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s} Y(s) \quad (6.20)$$

Réponse indicielle en cas d'amortissement
surcritique ($\eta > 1$)

$$x(t) = e(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\text{ch } \omega_1 t + \frac{\lambda}{\omega_1} \text{sh } \omega_1 t \right) \right) \quad (6.22)$$

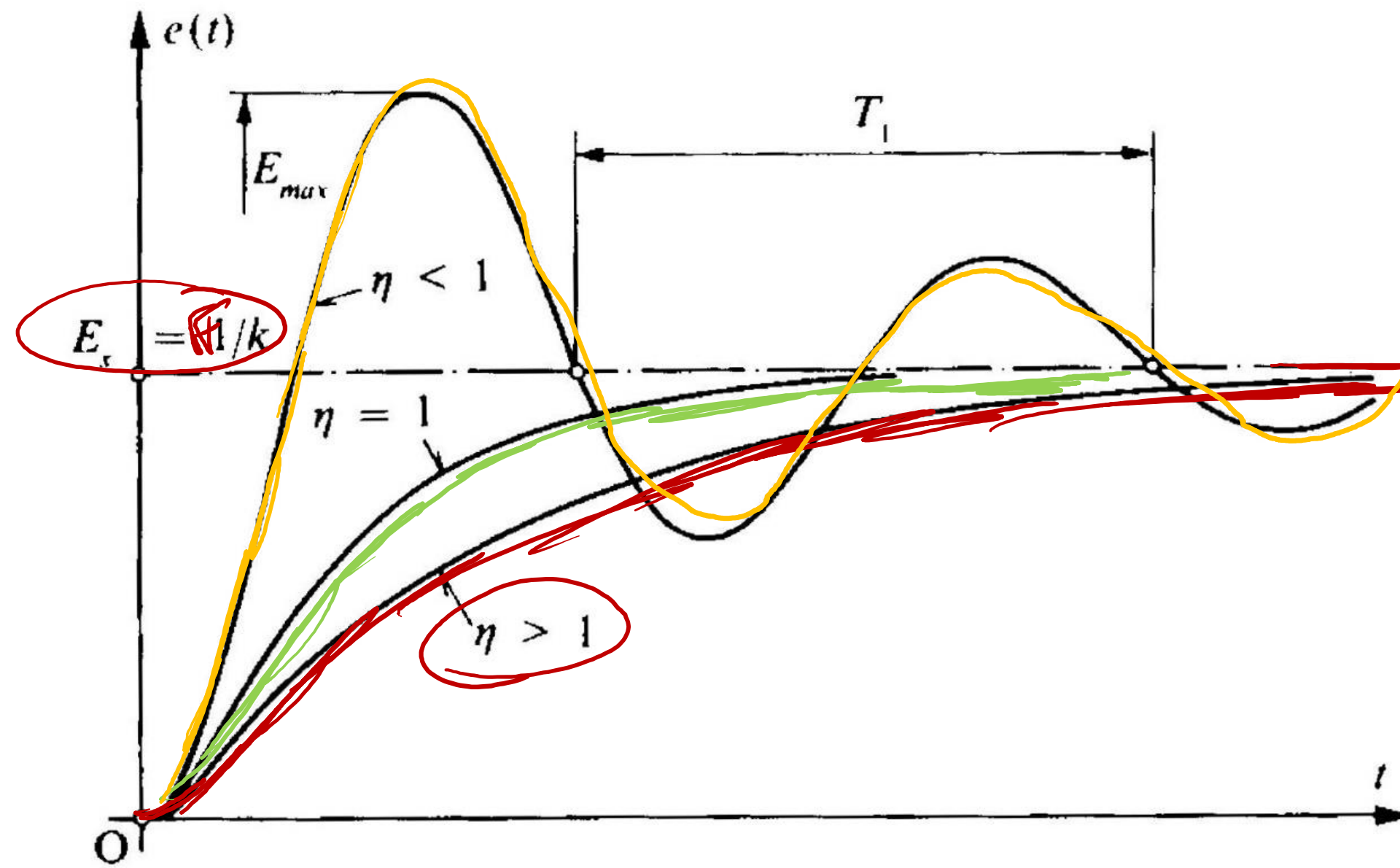
Réponse indicielle en cas d'amortissement
critique ($\eta = 1$)

$$x(t) = e(t) = \frac{1}{k} \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right) \quad (6.25)$$

Réponse indicielle en cas d'amortissement sous-
critique ($\eta < 1$)

$$x(t) = e(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\lambda}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right) \quad (6.27)$$

EPFL Solution de l'échelon de force



Relation entre les réponses *impulsionnelle* et *indicielle*

$$\underline{D(s)} = \underline{Y(s)} \cdot \underline{1} \quad \underline{E(s)} = \underline{Y(s)} \cdot \underline{\frac{1}{s}}$$

$$\Rightarrow \underline{D(s) = s E(s)} \quad (6.31)$$

$$\mathcal{L}(\dot{e}(t)) = s E(s) \quad (e(0) = 0) \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow D(s) = \mathcal{L}(\dot{e}(t)) \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow \boxed{d(t) = \dot{e}(t)} \quad (6.34)$$

EPFL Relation entre les réponses d et e

$$D(s) = Y(s) \cdot 1 \quad E(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow D(s) = s E(s) \quad (6.31)$$

$$\mathcal{L}(\dot{e}(t)) = s E(s) \quad (e(0) = 0) \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow D(s) = \mathcal{L}(\dot{e}(t)) \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow \boxed{d(t) = \dot{e}(t)} \quad (6.34)$$

